

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option économique

MATHÉMATIQUES II

Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h

Corrigé

PARTIE I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Covariance des variables aléatoires X et Y

- a) Pour tout X ayant une variance on a : $\text{Cov}(X, X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$
donc $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = V(\lambda X + Y)$ et

$$\begin{aligned} V(\lambda X + Y) &= E((\lambda X + Y)^2) - E(\lambda X + Y)^2 \\ &= E(\lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2) - [\lambda E(X) + E(Y)]^2 \\ &= \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2) \\ &\quad - \lambda^2 E(X)^2 - 2\lambda E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\ &= \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y) \end{aligned}$$

- b) Comme une variance est positive ou nulle, le polynôme du second degré $P(\lambda) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y)$ a un discriminant négatif ou nul.

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\text{Cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) \\ &= 4[\text{Cov}(X, Y)^2 - V(X)V(Y)] \leq 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$

On a égalité si et seulement si $\Delta = 0$ donc si le polynôme s'anule, i.e. s'il existe λ tel que $V(\lambda X + Y) = 0$

Or (c'est le rappel de début) cela équivaut à $\lambda X + Y$ constante presque sûrement.

Conclusion : Il y a égalité \iff il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Y = \lambda X + \mu$ presque sûrement

2. Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y .

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Le coefficient de corrélation linéaire est $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Et comme $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$ alors $\frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{V(X)V(Y)} \leq 1$ et en prenant la racine, $\left| \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right| \leq 1$ (la covariance peut être négative!)

Conclusion : $\rho \in [-1, 1]$

Et l'on a $\rho = \pm 1 \iff \rho^2 = 1 \iff \text{Cov}(X, Y)^2 = V(X)V(Y)$ donc à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe une constante μ telle que $Y = \lambda X + \mu$ presque sûrement.

b) Si X et Y sont indépendantes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et on a $\rho = 0$.

c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et $Y = X^2$.

On a $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

Comme $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ alors $E(X^2) = 1$ donc $E(Y) = 1$.

Enfin, pour $E(Y^2) = E(X^4)$, par le théorème de transfert, on teste la convergence absolue (=cv simple car tout est positif) de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \varphi(t) dt$:

$$\int_0^M t^4 \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^M t^4 e^{-t^2/2} dt$$

par intégration par parties : $u(t) = t^3$: $u'(t) = 3t^2$: $v'(t) = te^{-t^2/2}$: $v(t) = -e^{-t^2/2}$ avec u et v de classe C^1

$$\begin{aligned} \int_0^M t^4 e^{-t^2/2} dt &= \left[-t^3 e^{-t^2/2} \right]_0^M - \int_0^M -3t^2 e^{-t^2/2} dt \\ &= 0 + M^3 e^{-M^2/2} + 3 \int_0^M t^2 e^{-t^2/2} dt \\ &\rightarrow 3 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt \text{ qui converge donc} \\ \int_0^{+\infty} t^4 \varphi(t) dt &= 3 \int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt \end{aligned}$$

et de même en $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^0 t^4 \varphi(t) dt = 3 \int_{-\infty}^0 t^2 \varphi(t) dt$$

Avec $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt = E(X^2) = 1$ on trouve alors

$$E(Y^2) = 3$$

D'où $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 3 - 1 = 2$

On a également

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X^3) - E(X)E(X^2) \end{aligned}$$

et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \varphi(t) dt$ converge et est nulle (fonction impaire) alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $\rho(X, Y) = 0$.

Conclusion : réciproque fautive : X et X^2 ne sont pas indépendantes bien que $\rho(X, X^2)$ soit nul.

Non indépendantes : $(X^2 \leq 1) = (-1 \leq X \leq 1)$ et donc

$$P[(X^2 \leq 1) \cap (-1 \leq X \leq 1)] = P(X^2 \leq 1) \neq P(X^2 \leq 1)P(-1 \leq X \leq 1)$$

PARTIE II

1. Calculs préliminaires

a) Pour $n = q$ on a :

$$\sum_{k=q}^q \binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1}$$

Soit $n \geq q$ tel que $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} &= \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} + \binom{n+1}{q} \\ &= \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} \\ &= \binom{n+2}{q+1} \text{ (triangle de Pascal)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour } n \geq q : \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}}$

b) En faisant $q = 1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

pour $q = 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2} \text{ et} \\ \sum_{k=2}^n k(k-1) &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \end{aligned}$$

enfin pour $q = 3$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} &= \sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)}{3 \cdot 2} = \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \text{ et} \\ \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \end{aligned}$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .

On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $E(N_1)$ et $V(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_2)$, $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y .

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2 .**

- a) Les numéros présents dans l'urne sont équiprobables donc $P(N_1 = i) = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq i \leq n$
 $P_{N_1=i}(N_2 = j) = \frac{1}{n-1}$ pour $1 \leq j \leq n, j \neq i$ et $P_{N_1=j}(N_2 = j) = 0$ car la boule j est retirée de l'urne.
 $(N_1 = i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(N_2 = j) &= \sum_{i=1}^n P_{N_1=i}(N_2 = j) P(N_1 = i) \\ &= \sum_{i=1: i \neq j}^n \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} + P_{N_1=j}(N_2 = j) P(N_1 = j) \\ &= (n-1) \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Conclusion : Donc la loi de N_2 est la même que celle de N_1 .

N.B. On aurait aussi pu raisonner directement : sans conditionnement par le premier tirage, tous les numéros sont possibles et équiprobables pour le second tirage.

On a $E(N_1) = E(N_2) = \frac{n+1}{2}$ (loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$)

$$\begin{aligned} E(N_1^2) &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(N_1) &= E(N_1^2) - E(N_1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n+1}{12} (4n+2-3n-3) \\ &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Conclusion : $E(N_1) = E(N_2) = \frac{n+1}{2}$ et $V(N_1) = V(N_2) = \frac{n^2-1}{12}$

- b) On a $P(N_1 = i \cap N_2 = j) = 0$ si $i = j$ (événement impossible)
 et si $i \neq j$: $P(N_1 = i \cap N_2 = j) = P(N_1 = i) P_{N_1=i}(N_2 = j) = \frac{1}{n(n-1)}$

On a alors (on ne pense pas que N_1 et N_2 soient indépendantes)

$$\begin{aligned}
 E(N_1 N_2) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i j P(N_1 = i \cap N_2 = j) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \left[\sum_{j=1; j \neq i}^n j P(N_1 = i \cap N_2 = j) + 0 \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n i \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{j=1}^n j - i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n i \frac{n(n+1)}{2n(n-1)} - \sum_{i=1}^n i^2 \frac{1}{n(n-1)} \\
 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4n(n-1)} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{n(n-1)6} \\
 &= \frac{n(n+1)}{n(n-1)12} (3(n+n^2) - 4(2n+1)) \\
 &= \frac{(n+1)}{(n-1)12} (3n^2 - n - 2) \text{ que l'on factorise} \\
 &= \frac{(n+1)(3n+2)(n-1)}{(n-1)12}
 \end{aligned}$$

Conclusion : On a donc bien $E(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$

La covariance de (N_1, N_2) est alors

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(N_1, N_2) &= E(N_1 N_2) - E(N_1) E(N_2) \\
 &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
 &= \frac{(n+1)}{12} [3n+2 - 3n-3] \\
 &= -\frac{n+1}{12} \\
 \rho(N_1, N_2) &= \frac{\text{Cov}(N_1, N_2)}{\sqrt{V(N_1) V(N_2)}} \\
 &= -\frac{n+1}{12} \frac{12}{n^2-1} \\
 &= -\frac{1}{n-1}
 \end{aligned}$$

Conclusion : le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2 vaut $-\frac{1}{n-1}$

(Le signe négatif est cohérent : plus l'un est grand, moins l'autre a de chance de l'être.)

c) On a alors

$$\begin{aligned}
 V(N_1 + N_2) &= V(N_1) + V(N_2) + 2\text{Cov}(N_1, N_2) \\
 &= 2 \frac{n^2-1}{12} - 2 \frac{n+1}{12} \\
 &= \frac{n+1}{6} (n-1-1) \\
 &= \frac{(n+1)(n-2)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } V(N_1 + N_2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}$$

3. Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y

- a) $1 \leq i < j \leq n$. on a $(X = i \cap Y = j) = "$ le plus grand vaut j et le plus petit vaut i " et comme on a bien $i < j$
 $(X = i \cap Y = j) = "$ l'un vaut i et l'autre j " $= (N_1 = i \cap N_2 = j) \cup (N_1 = j \cap N_2 = i)$ incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(X = i \cap Y = j) &= P(N_1 = i \cap N_2 = j) + P(N_1 = j \cap N_2 = i) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Et sinon, l'événement est impossible et la probabilité est nulle.

- b) Les lois de X et de Y sont les lois marginales du couple donc pour $j \geq 2$

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j) \\ &= \sum_{i=1: i < j}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} + 0 \text{ car } j-1 \geq 1 \\ &= \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

et pour $j = 1$ on $P(Y = 1) = 0$ (car le numéro 1 sera le plus petit et ne pourra pas être le plus grand), ce que donne encore la formule.

Pour $i \leq n-1$

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=1}^n P(X = i \cap Y = j) \\ &= \sum_{j=i+1: j > i}^n \frac{2}{n(n-1)} + 0 \text{ car } i+1 \leq n \\ &= \frac{2(n-(i+1)+1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

qui donne bien 0 pour $i = n$.

$$\text{Conclusion : } \text{pour } i \text{ et } j \text{ de } [[1, n]] : P(Y = j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \text{ et } P(X = i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

- c) Pour $1 \leq i < j \leq n$:

Quand $Y = j$ le plus petit peut prendre toutes les valeurs de $[[1, j-1]]$ équiprobablement et $P_{Y=j}(X = i) = \frac{1}{j-1}$ pour $i \in [[1, j-1]]$.

Pour plus de sûreté, on revient à la définition :

$$P_{Y=j}(X = i) = \frac{P(X = i \cap Y = j)}{P(Y = j)} = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(j-1)}{n(n-1)}} = \frac{1}{j-1}$$

et de même

$$P_{X=i}(Y = j) = \frac{1}{n-i}$$

d) On a $X(\Omega) = \{1, n-1\}$ donc $(n+1-X)(\Omega) = \{2, n\} = Y(\Omega)$

Pour $2 \leq j \leq n$ on a

$$\begin{aligned} P(n+1-X=j) &= P(X=n+1-j) \\ &= \frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)} \text{ car } 1 \leq n+1-j \leq n-1 \\ &= \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = P(Y=j) \end{aligned}$$

Conclusion : $n+1-X$ et Y ont la même loi.

Donc ils ont même espérance et variance. $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$,

Or $E(n+1-X) = n+1-E(X)$ d'où $E(X) = n+1-E(Y)$

et $V(n+1-X) = (-1)^2 V(X)$ donc

Conclusion : $E(X) = n+1-E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$

4. Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

a) Idée : $X+Y = N_1 + N_2$ donc $E(X) + E(Y) = E(N_1) + E(N_2)$ ne conduit à rien ici car on a simplification...

On revient à la définition :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=2}^n j \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\ &= \frac{2}{3}(n+1) \end{aligned}$$

d'après les formules du début.

D'où $E(X) = n+1-E(Y) = \frac{1}{3}(n+1)$

b) On a :

$$\begin{aligned} E[Y(Y-2)] &= \sum_{j=2}^n j(j-2) \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1)(j-2) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

Or $E[Y(Y-2)] = E[Y^2 - 2Y] = E(Y^2) - 2E(Y)$ et $E(Y^2) = E[Y^2 - 2Y] + 2E(Y)$ donc

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}(n+1) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(3n-6+8) \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}(n+1)^2 \\&= \frac{n+1}{18}(9n+6-8n-8) \\&= \frac{(n+1)(n-2)}{18}\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$$

5. Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Comme X est l'une des deux valeurs et Y l'autre alors $X + Y = N_1 + N_2$

Donc

$$\begin{aligned}V(X + Y) &= V(N_1 + N_2) \\&= \frac{(n+1)(n-2)}{6}\end{aligned}$$

D'autre part $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ donc

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{2}[V(X + Y) - V(X) - V(Y)] \\&= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n-2)}{6} - 2\frac{(n+1)(n-2)}{18}\right) \\&= \frac{(n+1)(n-2)}{2 \cdot 18}\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \text{Cov}(X, Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}$$

b) On a alors

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\&= \frac{(n+1)(n-2)}{36} \frac{18}{(n+1)(n-2)} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \rho(X, Y) = \frac{1}{2} \text{ indépendant de } n \text{ (étonnant, non?)}$$

6. Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires X et Y

On se propose de retrouver les résultats précédents par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

On désigne par G la fonction génératrice du couple de variables aléatoires (X, Y) , définie par :

$$G(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j)(1+u)^i(1+v)^j$$

a) La fonction G est de classe C^2 en (u, v) tels que $u > -1$ et $v > -1$ et

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j) \cdot i \cdot (1+u)^{i-1} (1+v)^j \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j) \cdot i \text{ on inverse les sommes} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[i \sum_{j=1}^n P(X = i \cap Y = j) \right] \text{ loi marginale} \\ &= \sum_{i=1}^n iP(X = i) = E(X) \end{aligned}$$

et de même pour $\frac{\partial G}{\partial v}G(0, 0) = E(Y)$.

On a

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n P(X = i \cap Y = j) \cdot i(i-1) \cdot (1+u)^{i-2} (1+v)^j \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0, 0) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n P(X = i \cap Y = j) \cdot i(i-1) \text{ nul pour } i = 1 \\ &= \sum_{i=1}^n i(i-1)P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^n i^2P(X = i) - \sum_{i=1}^n iP(X = i) \\ &= E(X^2) - E(X) \end{aligned}$$

et de même $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0, 0) = E(Y^2) - E(Y)$

et enfin

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j) \cdot i \cdot j \cdot (1+u)^{i-1} (1+v)^{j-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0, 0) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j) \cdot i \cdot j \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

Conclusion : $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0, 0) = E(X^2) - E(X)$; $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0, 0) = E(Y^2) - E(Y)$; $\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0, 0) = E(XY)$

b) On doit ici revenir à la loi du couple : si $1 \leq i < j \leq n$ alors $P(X = i \cap Y = j) = \frac{2}{n(n-1)}$ donc pour $u, v, w \neq 0$:

$$\begin{aligned}
G(u, v) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j) (1+u)^i (1+v)^j \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1: i < j}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} (1+u)^i (1+v)^j + 0 \right] \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \left[(1+v)^j \sum_{i=1}^{j-1} (1+u)^i \right] \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \left[(1+v)^j (1+u) \frac{1 - (1+u)^{j-1}}{u} \right] \text{ car } 1+u \neq 1 \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left[-\frac{1}{u} \sum_{j=1}^n [(1+u)(1+v)]^j + \frac{1+u}{u} \sum_{j=1}^n (1+v)^j \right] \text{ et } 1+v \neq 1 \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left[-\frac{(1+w)(1+w)^n - 1}{u} + \frac{(1+u)(1+v)(1+v)^n - 1}{u} \right] \\
&= \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left[\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v} \right]
\end{aligned}$$

En développant par le binôme

$$\begin{aligned}
G(u, v) &= \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left[\frac{1}{w} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w^k - \frac{1}{v} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} v^k \right] \\
&= \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (w^{k-1} - v^{k-1})
\end{aligned}$$

c) $w = u + v + uv$ est C^1 sur \mathbb{R}^2 et

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 1 + v : \frac{\partial w}{\partial v} = 1 + u$$

On a donc

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} H(u, v) \text{ avec } H(u, v) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (w^{k-1} - v^{k-1})$$

Mais écrite ainsi, la fonction G n'est pas dérivable par th en $(0, 0)$.

N.B. : la suite est hors de portée en 4H...et même en davantage!

Il est normal de ne pas savoir le faire.

On peut encore factoriser par $(w - v)$: $w^{k-1} - v^{k-1} = (w - v) \sum_{i=0}^{k-2} w^i v^{k-2-i}$

avec $w = u + v + uv$ donc $w - v = u(1+v)$

$$G(u, v) = \frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k-2} w^i v^{k-2-i} + 0 \text{ (pour } k=1)$$

Pour dériver G , on dérivera $\frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)}$ et $H(u, v) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k-2} (w(u, v))^i v^{k-2-i}$

Dans les deux premières dérivées partielles de $H(u, v)$, les de degré > 2 seront nuls en $(0, 0)$.

On ne détaille que ceux de degré ≤ 2 : (calculs pour $n \geq 4$)

$$\begin{aligned}
 H(u, v) &= \binom{n}{2} + \binom{n}{3}(w + v) + \binom{n}{4}(w^2 + vw + v^2) + \dots \\
 H(0, 0) &= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\
 \frac{\partial H}{\partial u}(u, v) &= \binom{n}{3} \frac{\partial w}{\partial u} + \binom{n}{4} \left(2w \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \dots \\
 &= \\
 \frac{\partial H}{\partial u}(0, 0) &= \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) &= \binom{n}{4} (2(1+v)^2) + \dots \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0, 0) &= 2 \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u, v) &= \binom{n}{3} + \binom{n}{4} (2(1+v)^2 + 2w + 2v + 1) + \dots \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0, 0) &= \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \left(1 + \frac{3(n-3)}{4} \right) \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24} \\
 \frac{\partial H}{\partial v}(u, v) &= \binom{n}{3} (1+u+1) + \binom{n}{4} [2w(1+u) + w + v(1+u) + 2v] + \dots \\
 &= \binom{n}{3} (2+u) + \binom{n}{4} [w(3+2u) + v(3+u)] + \dots \\
 \frac{\partial H}{\partial v}(0, 0) &= 2 \binom{n}{3} \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u, v) &= \binom{n}{4} [(1+u)(3+2u) + (3+u)] + \dots \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0, 0) &= 6 \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) &= \frac{2(1+v)^2}{n(n-1)} H(u, v) + \frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)} \frac{\partial H}{\partial u}(u, v) \text{ donc} \\
 \frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) &= \frac{2}{n(n-1)} H(0, 0) + \frac{2}{n(n-1)} \frac{\partial H}{\partial u}(0, 0) \\
 &= \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
 &= 1 + \frac{n-2}{3} = \frac{n+1}{3}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On retrouve } E(X) = \frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) = \frac{n+1}{3}}$

Pour $E(Y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) &= \frac{4(1+u)(1+v)}{n(n-1)}H(u, v) + \frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial v}(u, v) \text{ donc} \\ \frac{\partial G}{\partial u}(0, 0) &= \frac{4}{n(n-1)}H(0, 0) + \frac{2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial v}(0, 0) \\ &= \frac{4}{n(n-1)}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= 2 + \frac{2n-4}{3} = \frac{2n+2}{3}\end{aligned}$$

Conclusion : On retrouve $E(Y) = \frac{\partial G}{\partial v}(0, 0) = \frac{2}{3}(n+1)$

Et on continue

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u, v) &= \frac{2(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(u, v) + \frac{2(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(u, v) + \frac{2(1+u)(1+v)^2}{n(n-1)}\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u, v) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0, 0) &= \frac{4}{n(n-1)}\frac{\partial H}{\partial u}(0, 0) + \frac{2}{n(n-1)}\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0, 0) \\ &= \frac{4}{n(n-1)}\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} \\ &= \frac{2}{3}(n-2) + \frac{1}{6}(n-3)(n-2) \\ &= \frac{(n-2)(n+1)}{6} = E(X^2) - E(X)\end{aligned}$$

D'où

$$E(X^2) = \frac{(n-2)(n+1)}{6} + \frac{n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{6}$$

et

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18}\end{aligned}$$

Conclusion : $E(X^2) = \frac{n(n+1)}{6}$ et $V(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$

Etc ...